

EP III - Seminar

Kap. 5.1.1: Fermionen und Bosonen - Pauli-Prinzip

System zweier Elektronen Betrachten wir ein System mit zwei Elektronen in den Zuständen a und b , wobei a und b alles beinhalten, was zur Beschreibung des Zustandes der Elektronen nötig ist, z. B. die vier Quantenzahlen n, l, m, s . Die Wellenfunktion des ersten Elektrons sei $\Psi_1(x)$, die des zweiten $\Psi_2(x)$, wobei das x für den Zustand steht. (Befindet sich das erste Elektron im Zustand a , so lautet die zugehörige Wellenfunktion also $\Psi_1(a)$.) Für die Wellenfunktion des gesamten Systems kann man nun folgenden Produktansatz wählen:

$$\Psi^I = \Psi_1(a) \cdot \Psi_2(b)$$

Nun sind die beiden Elektronen aber nicht unterscheidbar, so dass man nicht sagen kann, ob das erste oder das zweite Elektron im Zustand a ist. Die folgende Wellenfunktion müsste also gleichwertig zur Ersten sein:

$$\Psi^{II} = \Psi_1(b) \cdot \Psi_2(a)$$

Bei diesem Produktansatz ist das jedoch (im Allgemeinen) nicht gewährleistet. Bei Vertauschung der Elektronen muss die Gesamt-Wellenfunktion gleiche Vorhersagen machen, das heißt die Wahrscheinlichkeit muss gleich bleiben:

$$|\Psi^I|^2 = |\Psi^{II}|^2 \implies \Psi^I = \pm \Psi^{II}$$

Für jedes der beiden Vorzeichen findet man durch leichte Modifikation eine Lösung, die die Bedingung $\forall \Psi$ erfüllt:

$$\Psi^s = \Psi_1(a) \cdot \Psi_2(b) + \Psi_1(b) \cdot \Psi_2(a)$$

$$\Psi^a = \Psi_1(a) \cdot \Psi_2(b) - \Psi_1(b) \cdot \Psi_2(a)$$

Ψ^s heißt dabei symmetrische Wellenfunktion (Keine Änderung beim Vertauschen) und Ψ^a antisymmetrische Wellenfunktion (nur Vorzeichenwechsel beim Vertauschen). Setzt man $a = b$ so ist $\Psi^a = 0$. Also ist bei Teilchen, die durch eine antisymmetrische Wellenfunktion beschrieben werden, die Wahrscheinlichkeit, zwei Teilchen im gleichen Zustand zu finden, exakt Null. Diese Teilchen sind die Teilchen, aus denen die Materie unseres Universums aufgebaut ist, also Quarks und Leptonen. Die Tatsache, dass sich niemals zwei Teilchen im selben Zustand befinden können, ist das berühmte **Pauli-Prinzip**. Teilchen, die unter diesem Prinzip fallen, heißen **Fermionen** und haben immer einen halbzahligen Spin. Eine symmetrische Wellenfunktion beschreibt **Bosonen**. Dies sind Teilchen, die die grundlegenden Wechselwirkungen im Universum vermitteln und immer einen ganzzahligen Spin haben.

Die Bildung einer antisymmetrischen Wellenfunktion für N Elektronen in n Zuständen wird durch die Slater-Determinante beschrieben:

$$\Psi^a = \frac{1}{\sqrt{N!}} \cdot \begin{vmatrix} \Psi_1(a) & \Psi_1(b) & \Psi_1(c) & \cdots & \Psi_1(n) \\ \Psi_2(a) & \Psi_2(b) & \Psi_2(c) & \cdots & \Psi_2(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_N(a) & \Psi_N(b) & \Psi_N(c) & \cdots & \Psi_N(n) \end{vmatrix}$$

Quantenstatistik Für Fermionen und Bosonen gibt es Verteilungsfunktionen, die die Wahrscheinlichkeit angeben, ein Fermion oder Boson bei der angegebenen Energie E zu finden. Dies ist analog zur Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeit in einem Gas.

Bosonen gehorchen dabei der **Bose-Einstein-Statistik**:

$$f(E) = \left[\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B \cdot T}\right) - 1 \right]^{-1}$$

μ ist dabei das so genannte *chemische Potential*. Dieses ist definiert als die Energie, bei der ein neues Teilchen dem System hinzugefügt würde. Für $\mu = 0$ ergibt die Bose-Einstein-Statistik den hinteren Teil des Planckschen Strahlungsgesetzes. Für Fermionen dagegen gilt die **Fermi-Dirac-Verteilung** (man beachte das Vorzeichen vor der 1!):

$$f(E) = \left[\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B \cdot T}\right) + 1 \right]^{-1}$$

Bei dieser Gleichung kann man nun den Grenzwert für $T \rightarrow 0$ betrachten. Ist $E < \mu$, so ist $f(E) = 1$, ist jedoch $E > \mu$, so ist $f(E) = 0$. In diesem Fall wird das chemische Potential als Fermi-Energie E_F bezeichnet.

Bose-Einstein-Kondensation Die Gesamtzahl der Bosonen in einem System ist gegeben durch:

$$N = \sum_k \left[\exp\left(\frac{E_k - \mu}{k_B \cdot T}\right) - 1 \right]^{-1}$$

In dieser Gleichung wird über alle möglichen Wellenvektoren k summiert, E_k ist dann die Energie, die die entsprechende Welle besitzt, bei Teilchen ist $E_k = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2 \cdot m}$. Allerdings funktioniert dies nur, solange es diskrete und damit abzählbare Werte für k gibt. Gilt dies nicht mehr, so muss man zum Integral übergehen. Dabei muss man allerdings den Fall $k = 0 \Rightarrow E_k = 0$ gesondert betrachten. Die Integralformulierung lautet:

$$N = \int_k^\infty \left[\exp\left(\frac{E_k - \mu}{k_B \cdot T}\right) - 1 \right]^{-1} \cdot dk^3 + N_0(E = 0)$$

Kühlt man dieses System ab, so sinkt die Zahl der Bosonen, die durch den Integralterm beschrieben werden, also Teilchen mit $E \neq 0$. Da die Gesamtzahl jedoch konstant bleiben muss, muss N_0 bei sinkender Temperatur größer werden, also mehr Teilchen den Zustand $E = 0$ einnehmen.

Dies ist im Experiment mit Atomen gelungen, bei denen sich die Spins der Bestandteile zu einem ganzzahligen Wert addieren. Dies kann zum Beispiel mit magneto-optischen Fallen realisiert werden. Dabei wird ein Helmholtzspulenpaar verwendet, in dem der Strom (anders als sonst) gegenläufig fließt. Dadurch ist das Magnetfeld in der Mitte genau Null. Will das Atom aber zum Beispiel in positiver z -Richtung entkommen, so muss es gegen das Magnetfeld anlaufen und kehrt irgendwann um. Dabei nutzt man keine geladenen Teilchen, sondern den Bahndrehimpuls der Elektronen inkl. Zeeman-Effekt. In negativer z -Richtung würde es durch das Magnetfeld beschleunigt, allerdings strahlt man hier Laserlicht ein, das vom Atom im entsprechenden (Zeeman-aufgespaltenen) Zustand absorbiert werden kann. Die Absorption des Photons bewirkt einen Rückstoß, der das Atom in die Gegenrichtung treibt. Diese Apparatur braucht man drei Mal (für alle drei Raumrichtungen). Dann kann man durch Variation des Magnetfeldes nacheinander alle Atome höherer Temperatur „wegschießen“, bis nur noch die gewünschten Atome mit einer Temperatur im Nanokelvin-Bereich überbleiben - das gewünschte Bose-Einstein-Kondensat.

Supraleitung Kühlt man einen Stoff genügend ab, so koppeln in seinem Innern ein Elektron mit Spin $+\frac{1}{2}$ und ein Elektron mit Spin $-\frac{1}{2}$ zu einem so genannten **Cooper-Paar** mit Spin 0. Ein Cooper-Paar gehorcht also der Bose-Einstein-Statistik und fällt nicht unter das Pauli-Prinzip. Über Gitterschwingungen induziert ein Cooper-Paar die Bildung weiterer Cooper-Paare. Ähnlich wie man Energie aufwenden muss, um H_2 in zwei H -Atome zu spalten, so muss man auch Energie aufwenden, um die Cooper-Paare wieder zu trennen. Wenn die kinetische Energie (aufgrund thermischer Bewegungen) der Teilchen in dem Material nicht mehr ausreicht, dies zu tun ($\Delta E < k_B \cdot T$), dann können die Elektronen in dem Metall bei Stößen keine Energie mehr austauschen - die Stöße werden vollkommen elastisch, dissipative Streuung ist ausgeschlossen. Wenn das passiert, dann fällt der elektrische Widerstand des Materials auf 0 - es wird supraleitend.

Suprafluidität Ein ähnliches Phänomen beobachtet man auch bei ganzen Atomen. Kühlt man z. B. ^4He auf unter 2,17 K ab, so koppeln die Spins von Nukleonen und Elektronen zum Gesamtspin Null. Um diesen Zustand wieder aufzubrechen ist ebenfalls Energie nötig und unterhalb von 2,17 K haben die Helium-Atome diese nicht mehr. Dann können die Atome ebenfalls bei Stößen keine Energie mehr austauschen und der Strömungswiderstand fällt auf 0, während die Wärmeleitfähigkeit gegen ∞ geht. Haben die Atome eine ungerade Anzahl an „Bausteinen“, so kann in einem Atom kein ganzzahliger Spin entstehen. Hier müssen zwei Atome analog zur Supraleitung ein Cooper-Paar bilden. Dies ist allerdings weniger stabil als die oben genannte Variante, so dass die Sprungtemperaturen geringer sind. Bei ^3He liegt sie z. B. bei 2,6 mK.

Quellen:

- Skript, Kapitel 5.1.1 (Seite 132 - 139)
- Demtröder 3, Seite 183 - 187

Aufgaben: Auf den Übungszetteln bis jetzt keine, im Demtröder 3 kann man sich Aufgabe 5 auf Seite 218 mal ansehen, dort soll man aber nur erklären und nicht rechnen...