Markus Thürmann
3. Februar 2009

EP III - Seminar

Klausuraufgaben

Auf Grund starker Resonanz gibt es nun auch die Lösungen zur *Klausur*. Das Einsetzen der Werte für einen konkreten Zahlenwert, sei dem geneigten Leser als Übungsaufgabe überlassen ;-)

Aufgabe 1 Bohr'sches Atommodell

a) Die Bohr'schen Postulate besagen, dass sich ein Elektron auf wohldefinierten Bahnen befindet und einen gequantelten Drehimpuls hat. Es gilt somit, wenn man davon ausgeht, dass sich in den Bahnen Tentripetal- und Coulombkraft die Waage halten:

$$L = \mu v r = n\hbar \text{ sowie } \frac{\mu v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

Somit kann man nun aus der ersten Gleichung (es gilt übrigens $\mu \approx m_e$) v in die zweite einsetzen und erhält dann

$$\begin{aligned}
\frac{n^2\hbar^2}{\mu r^3} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \\
r &= \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{\mu e^2} \\
&= n^2 \cdot \underbrace{\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}}_{:=a_0}
\end{aligned}$$

b) Nun setzt man die Werte von Aufgabenteil $a)$ für die Geschwindigkeit und die Entfernung ein. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass die potentielle Energie eigentlich negativ ist (da man einmal $+e$ und einmal $-e$ hat). Man erhält somit

$$\begin{aligned}
E_n &= E_{kin,n} + E_{pot,n} \\
&= \frac{\mu v^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \\
&= \frac{\mu n^2\hbar^2}{2r^2\mu^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^4\mu}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2} \\
&= \frac{n^2\hbar^2}{2r^2\mu} - \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4\mu}{\hbar^2 n^2} \\
&= \frac{n^2\hbar^2\mu^2 e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^4 n^4\mu} - \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4\mu}{\hbar^2 n^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4\mu}{\hbar^2 n^2} - \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4\mu}{\hbar^2 n^2} \\
&= -\frac{e^4\mu}{8\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

c) Für das B-Feld gilt (allgemein; für die M-Schale ist dann natürlich $n = 3$ zu setzen)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2n^2 a_0}$$

I ist hierbei die Stromstärke, die sich ergibt als

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Dies ist beim Umlauf eines Elektrons gerade eine Elektronenladung e innerhalb einer Umlaufperiode.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{e}{T} \\ &= \frac{ev}{U} && \left|v = \frac{n\hbar}{\mu r}\right. \\ &= \frac{en\hbar}{\mu r \cdot 2\pi r} && |r = n^2 a_0 \\ &= \frac{e\hbar}{2n^3 \mu\pi a_0^2} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das B-Feld

$$\Rightarrow B_n = \frac{1}{n^5} \cdot \frac{\mu_0 e\hbar}{4\mu\pi a_0^3}$$

Aufgabe 2 Bei dieser Aufgabe trifft ein Photon auf ein freies Elektron

a) Trifft ein Photon auf ein Elektron, so wird es gemäß des Compton-Effektes gestreut. Dieser gibt für eine Anfangswellenlänge λ_0 eine neue Wellenlänge λ_s mit

$$\lambda_s = \lambda_0 + 2\lambda_C \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

Nun soll gerade ein zentraler Stoß vorliegen, also $\Theta = \pi$ und gerade Verdopplung der Wellenlänge vorliegen, also $\lambda_s = 2\lambda_0$. Setzt man dies ein, so erhält man direkt

$$\begin{aligned} 2\lambda_0 &= \lambda_0 + 2\lambda_C \\ \Rightarrow \lambda_0 &= 2\lambda_C \end{aligned}$$

b) Für die Masse eines Photons gilt $E = h\nu = mc^2$. Dies kann man nach m umstellen und erhält mit $\lambda_c := \frac{h}{m_e c}$

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda_0 c} = \frac{h}{2\lambda_c c} = \frac{m_e}{2}$$

Für den Impuls gilt $p = \frac{h}{\lambda}$

$$p = \frac{h}{2\lambda_c} = \frac{1}{2} m_e c$$

c) Sorry erstmal, dass scheinbar auch hier schon Unklarheiten entstanden sind. Es war gemeint, welchen Impuls muss ein Elektron haben, damit er den gleichen Impuls hat, wie das Photon aus b), welchen Impuls muss ein Proton haben, damit er den gleichen Impuls hat, wie das Photon aus b).
Aus der obigen Gleichung erkennt man direkt, dass für $p_{phot} = p_e = m_e v$ gelten muss $v_e = \frac{1}{2}c$. Also sollte man definitiv relativistisch rechnen. Im zweiten Fall setzt man nun

$$m_p v_p = \frac{1}{2} m_e c \Rightarrow v_p = \frac{m_e}{2m_p} c$$

Hier müsste man also nicht relativistisch rechnen.

Aufgabe 3 Betrachten Sie ein Elektron, dass sich mit der Hälfte der Lichtgeschwindigkeit bewegt. (Na? Wem fällt jetzt was auf? Richtig, wir betrachten immer noch das gleiche Elektron, wie aus Aufgabe darüber)

a) Gemäß dem Wien'schen Verschiebungsgesetzes gilt

$$\lambda_{max} T = \tau = const \Rightarrow T = \frac{\tau}{\lambda_{max}}$$

Für die DeBroglie-Wellenlänge gilt außerdem

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} = \frac{2h}{m_e c}$$

Somit folgt

$$T = \frac{\tau m_e c}{2h}$$

b) Es gilt gemäß dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt

$$P = \sigma T^4 A = \sigma \left(\frac{\tau m_e c}{2h}\right)^4 \cdot 4\pi a_0^2 = \frac{\sigma \pi a_0^2}{4} \left(\frac{\tau m_e c}{h}\right)^4$$

c) Würde sich die Erde in einer Entfernung von $R = 2,646 \cdot 10^{11} m \approx \frac{1}{2} \cdot 10^{22} a_0$ in der habilen Zone befinden? (Habile Zone bedeutet, dass auf der Erde eine Temperatur vorherrscht, bei der Wasser in flüssiger Form vorkommt) Angenommen es liegt auf der Erde ein thermisches Gleichgewicht vor, dann heißt dies, dass die Erde genausoviel Energie aufnimmt, wie sie wieder abstrahlt. Sie erhält die Energie

$$P_{an} = P \cdot \frac{\pi r_E^2}{4\pi R^2} = P \cdot \frac{r_E^2}{4R^2 2}$$

Die abgestrahlte Leistung ist:

$$P_{ab} = \sigma 4\pi r_E^2 T_E^4$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} 4P \cdot \frac{r_E^2}{4R^2} = \sigma \pi a_0^2 \left(\frac{\tau m_e c}{h}\right)^4 \cdot \frac{r_E^2}{4R^2} &\overset{!}{=} \sigma 4\pi r_E^2 T_E^4 \\ \Rightarrow a_0^2 \left(\frac{\tau m_e c}{h}\right)^4 &= 16 R^2 T_E^4 \qquad |R = n a_0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\tau m_e c}{h}\right)^4 &= 16 n^2 T_E^4 \\ \Rightarrow T_E &= \frac{\tau m_e c}{2h\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Ein Elektron befindet sich in einem unendlich hohen Potentialtopf der Breite $a = 2a_0$

a) Die minimale Wellenlänge entspricht der Grundschwingung. Dort hat es die Wellenlänge $\lambda = 2a = 4a_0$ Allgemein kann es die Wellenlängen $\lambda = \frac{4}{n} a_0$ haben.

b) Man kann zwei Observablen nicht scharf bestimmen, wenn deren Operatoren nicht kommutieren, d.h. $[\hat{p}, \hat{x}] = \hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} \neq 0$ Dies kann man nun explizit bestimmen mit $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ und $\hat{x} = x$ Es gilt dann

$$-i\hbar\nabla \circ x + x \circ i\hbar\nabla = -ix\hbar\nabla - i\hbar + ix\hbar\nabla = -i\hbar \neq 0$$

Es folgt daraus die Heisenberg'sche Unschärfe für Ort und Impuls, also $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$

c) Ein Elektron hat die DeBroglie-Wellenlänge $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$ Somit gilt für seine Unbestimmtheit

$$\Delta\lambda_{dB} = \frac{h}{p^2}\Delta p$$

Für den Impuls eines Elektrons gilt außerdem $p = \frac{h}{\lambda}$ Mit den oben ausgerechneten Werten für λ erhält man

$$\lambda_{dB} = \frac{4a_0}{n} \text{ sowie } \Delta\lambda_{dB} = \frac{16a_0^2}{hn^2}\Delta p$$

Für die Unschärfe in der p gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation mit $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, wobei hier gerade $\Delta x = 2a_0$. Somit ist gerade $\Delta p_x = \frac{\hbar}{2a_0}$ Daraus ergibt sich dann

$$\Delta\lambda_{dB} = \frac{16a_0^2}{hn^2} \cdot \frac{\hbar}{2a_0} = \frac{8a_0}{hn^2} \cdot \frac{h}{2\pi} = \frac{4a_0}{\pi n^2}$$

Die Unsicherheit wird somit mit dem Faktor $\frac{1}{n^2}$ kleiner.

Aufgabe 5 Bedenken Sie die Hund'schen Regeln

a) Für Chlor gilt $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^5$. Man betrachtet (da nicht voll) nun die $3p$-Unterschale und erhält dann bei 5 Elektronen

$$S = \Sigma s = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \text{ sowie } L = \Sigma m = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 = 1 \hat{=} P$$

Da die Schale mehr als halb gefüllt ist gilt $J = L + S$ und somit ist das Termsymbol $^2P_{\frac{3}{2}}$ Für Titan gilt $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 d^2 4s^2$. Man betrachtet (da nicht voll) nun die $3d$-Unterschale und erhält dann bei 2 Elektronen

$$S = \Sigma s = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ sowie } L = \Sigma m = 2 + 1 = 3 \hat{=} F$$

Da die Schale weniger als halb gefüllt ist gilt $J = |L - S|$ und somit ist das Termsymbol $^3F_2$