21. Januar 2009
Markus Thürmann

EP III - Seminar

— Quantenzahlen —

Im weiteren Verlauf sollen die drei wichtigsten Quantenzahlen hergeleitet werden. Die Herleitung bezieht sich hierbei in Anfolge sehr stark auf den Demtröder.

Magnetische Quenatenzahl m Zunächst einmal beginnt man mit der Schrödingergleichung.

$$\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + E_{pot}\Psi = E\Psi && \left| -E\Psi \text{ und } \cdot(-1)\right. \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + (E - E_{pot})\,\Psi = 0 && \left| \cdot \frac{2m}{\hbar}\right. \\
\Leftrightarrow\ &\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_{pot})\,\Psi = 0 && (1)
\end{aligned}$$

Da im folgenden ein Wasserstoffatom betrachtet wird, ist es zweckmäßig ein kugelsymmetrisches Problem anzunehmen. Für dieses gilt dann für den Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Diesen etwas unschönen Ausdruck kann man nun in die Gleichung (1) einsetzen. Somit erhält man

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_{pot})\,\Psi = 0 \tag{2}$$

Der nächste Schritt ist etwas axiomatisch. Man geht nun davon aus, dass man die Lösung der Schrödingergleichung als Produkt der Lösungen nach den einzelnen Variablen schreiben kann. Somit wäre dann

$$\Psi(r,\vartheta,\phi) \stackrel{!}{=} R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

Diesen Anzaht kann man nun in (2) einsetzen.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)}{\partial\vartheta}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} \\
&\qquad + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_{pot})\,R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{R(r)\Phi(\varphi)}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) \\
&\qquad + \frac{R(r)\Theta(\vartheta)}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} \\
&\qquad + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_{pot})\,R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) = 0 && \left|\cdot r^2\sin^2\vartheta\right. \\
\Leftrightarrow\ &\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)\sin^2\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + R(r)\Phi(\varphi)\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) \\
&\qquad + R(r)\Theta(\vartheta)\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} \\
&\qquad + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_{pot})\,R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)r^2\sin^2\vartheta = 0 && \left| : \Psi = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)\right. \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sin^2\vartheta}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{\sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} \\
&\qquad + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_{pot})\,r^2\sin^2\vartheta = 0 && (3)
\end{aligned}$$

Formt man diese Formel nun ein weiteres Mal um, so erhält man

$$\frac{\sin^2\vartheta}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{\sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-E_{pot}\right)r^2\sin^2\vartheta=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}\tag{4}$$

Nun kann man sowohl die linke als auch die rechte Seite des Gleichheitszeichens betrachten. Man kann dann die Gleichung (da die linke Seite nur von r und ϑ und die rechte Seite nur von φ abhängt) mit geeigneter Definition umschreiben in

$$\rho(r,\vartheta)=\phi(\varphi)$$

Da es sich um eine Schrödingergleichung handelt, soll diese Gleichung nun für alle möglichen Kombinationen aus r, φ und ϑ gelten. Die einzige Möglichkeit hierfür ist, dass es sich auf beiden Seiten um Konstanten handelt. Betrachtet man nun $\phi(\varphi)$ so folgt dann mit der Konstanten C

$$\begin{aligned}C&=\phi(\varphi)\\&=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}\\-C\Phi&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\end{aligned}\tag{5}$$

Mittels eines Exponentialansatzes erhält man dann sehr schnell die Lösung

$$\Phi=Ae^{\pm i\sqrt{C}\varphi}$$

Da es sich aber bei φ um einen Winkel handelt, muss die Gleichung noch so modifiziert werden, dass keine zwei verschiedenen Lösungen für $\varphi=0$ oder $\varphi=2\pi$ möglich sind, da ansonsten die Schrödingergleichung nicht eindeutig im Raum ist. Allgemein muss somit gelten

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2n\pi)$$

Setzt man beides ein, so erhält man eine Bedingung für C

$$\begin{aligned}Ae^{\pm i\sqrt{C}\varphi}&\overset{!}{=}Ae^{\pm i\sqrt{C}(\varphi+2n\pi)}\\&=Ae^{\pm i\sqrt{C}\varphi}e^{\pm i\sqrt{C}2n\pi}&&|:Ae^{\pm i\sqrt{C}\varphi}\\1&=e^{\pm i\sqrt{C}2n\pi}\end{aligned}$$

Dies ist die Bedingung für den Einheitskreis im komplexen und die Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn

$$\sqrt{C}:=m\text{ mit }m\in\mathbb{Z}$$

Somit lässt sich Ψ schreiben als

$$\Phi_m(\varphi)=Ae^{im\varphi}$$

Nun muss noch A bestimmt werden. Dies geschieht über die Normierung über den gesamten Kreis. Man erhält dann

$$\begin{aligned}1&=\int_0^{2\pi}\Phi_m^*(\varphi)\Phi_m(\varphi)d\varphi\\&=\int_0^{2\pi}A^2e^{im\varphi}\cdot e^{-im\varphi}d\varphi\\&=A^2\int_0^{2\pi}e^{im\varphi-im\varphi}d\varphi\\&=A^2\int_0^{2\pi}d\varphi\\&=2\pi A^2\\\Leftrightarrow A&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Die Lösung des Φ-Teils lautet somit

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

Das hier verwendete m wird im weiteren auch als *magnetische Quantenzahl* bezeichnet.

Drehimpulsquantenzahl I Man nimmt nun die bereits ausgerechnete Funktion (4) und setzt die Konstante ein.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2\vartheta}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{\sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-E_{pot}\right)r^2\sin^2\vartheta=m^2 \quad &| : \sin^2\\
\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-E_{pot}\right)r^2=\frac{m^2}{\sin^2\vartheta} \quad &| -\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)\\
\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-E_{pot}\right)r^2=\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) \quad & (6)
\end{aligned}$$

Erneut stellt man wieder fest, dass die linke Seite nur von r abhängt während die rechte nur von ϑ abhängt. Was sagt und das für beide Seiten? Richtig! Sie sind wieder beide konstant. Somit kann man die rechte Seite setzen mit

$$C_2=\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)$$

bzw.

$$-C_2=-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}+\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)$$

Nun geht es daran, diese etwas kompliziertere DGL zu lösen. Hierfür betrachtet man zunächst den speziellen Fall $m=0$. Die Gleichung „vereinfacht" sich dann zu

$$\begin{aligned}
-C_2&=\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) && |+C_2 \text{ und } \cdot\Theta(\vartheta)\\
0&=C_2\Theta(\vartheta)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) && |\text{substituiere } \xi=\cos\vartheta\\
0&=C_2\Theta(\xi)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{\partial\Theta(\xi)}{\partial\xi}\right) && (7)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung bezeichnet man auch als *Legendre'sche Differentialgleichung*. Der Lösungsansatz ist hierbei polynomischer Natur, also $\Theta=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+\cdots$ Man erinnert sich nun, dass $\xi=\cos(\vartheta)$ war. Diese sind also für alle Wert zwischen 0 und 1, bis auf die beiden Polstellen $\vartheta=0°$ und $\vartheta=180°$. Damit die Funktion dort aber auch noch definert ist, muss die Polynomreihe irgendwann abbrechen und somit existiert ein letzes Glied a_l (das hat jetzt nicht zufällig den Index l) Setzt man nun diesen Ansatz in die Gleichung ein und macht einen Koeffizientenvergleich, so erhält man eine Rekursionsformel für die einzelnen a. Diese lautet dann

$$a_{k+2}=a_k\cdot\frac{k\cdot(k+1)-C_2}{(k+2)(k+1)}$$

Man betrachtet nun wieder den besonderen Fall des letzten Gliedes. An der Stelle l soll die Formel abbrechen, d.h. $a_{l+2}=0$ aber $a_l\neq 0$ Somit gilt

$$\begin{aligned}
0&=a_l\cdot\frac{l\cdot(l+1)-C_2}{(l+2)(l+1)} && |:a_l \text{ (weil } a_l\neq 0)\\
&=\frac{l\cdot(l+1)-C_2}{(l+2)(l+1)} && |\cdot(l+2)(l+1)\\
&=l(l+1)-C_2 && |+C_2\\
C_2&=l(l+1) \text{ mit } l\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Für $m\neq 0$ kann ein analoges Vorgehen angenommen werden. Dieses ist allerdings um einiges komplexer die Gleichungen lassen sich dann als Lösung des *assoziierenden Legendrefunktion* beschreiben. Diese lautet dann

$$P_l^m(\cos\vartheta)=c\cdot\left(1-\xi^2\right)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}}\left(P_l(\xi)\right)$$

Was man nun noch wissen muss ist, dass $P_l(\xi)$ ein Polynom des Grades l ist. Was man nun als Lösung erwartet, ist eine von 0 verschiedene Lösung ist. Somit darf die Ableitung nicht zu weit gehen und es gilt $-l\leq m\leq l$

> Die Lösung des Θ-Teils lässt sich nicht seperat hinschreiben und stellt jedes Mal eine *assoziierenden Legendrefunktion* dar, die die Lösung einer DGL ist. Diese schreibt sich dann als P_l^m. Es gilt
>
> $$-l\leq m\leq l$$
>
> Das hier verwendete l wird im weiteren auch als *Drehimpulsquantenzahl* bezeichnet.

Hauptquantenzahl n Nun muss noch der dritte Teil der Gleichung bestimmt werden. Dieser ergibt sich durch Lösen des Radialteils. Um Verwechslungen mit der magnetsichen Quantenzahl zu vermeiden sei von hier an die Masse mit μ beschrieben. Mittlerweile lässt sich (Θ) schreiben als

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E-E_{pot}\right)r^2 &= l(l+1) && |:r^2 \text{ und } \cdot R(r)\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E-E_{pot}\right)R(r) &= \frac{l(l+1)R(r)}{r^2}
\end{aligned}$$

Da man hier nun ein wasserstoffähnliches Atom (Kern + e^-) betrachtet, kann man E_{pot} mit dem Coulombpotential beschreiben. Somit gilt dann

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{c}{r}\right)R(r)=\frac{l(l+1)R(r)}{r^2}\qquad\text{wobei hier } c=\frac{Zq^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

Man betrachtet nun (sinngemäßerweise) ein gebundenes Elektron. Für dieses ist dann $E<0$ und nutzt den Ansatz $R(r)=u(r)\cdot e^{-\kappa r}$ wobei κ definiert ist als $\kappa:=\sqrt{-2\mu E}/\hbar$ und $u(r)$ wieder ein Polynom beschreibt. Somit erhält man dann

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(r)\cdot e^{-\kappa r}}{\partial r}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{c}{r}\right)u(r)\cdot e^{-\kappa r} &= \frac{l(l+1)u(r)\cdot e^{-\kappa r}}{r^2}\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2e^{-\kappa r}\frac{\partial u(r)}{\partial r}-r^2\kappa u(r)e^{-\kappa r}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{c}{r}\right)u(r)\cdot e^{-\kappa r} &= \frac{l(l+1)u(r)\cdot e^{-\kappa r}}{r^2}\\
\frac{2}{r}e^{-\kappa r}\frac{\partial u(r)}{\partial r}-\kappa e^{-\kappa r}\frac{\partial u(r)}{\partial r}+e^{-\kappa r}\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}-\kappa\frac{\partial u(r)}{\partial r}e^{-\kappa r}+\kappa^2u(r)e^{-\kappa r}&\\
-\frac{2\kappa}{r}u(r)e^{-\kappa r}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{c}{r}\right)u(r)\cdot e^{-\kappa r} &= \frac{l(l+1)u(r)\cdot e^{-\kappa r}}{r^2} && |:e^{-\kappa r}\\
\frac{2}{r}\frac{\partial u(r)}{\partial r}-\kappa\frac{\partial u(r)}{\partial r}+\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}-\kappa\frac{\partial u(r)}{\partial r}+\kappa^2u(r)-\frac{2\kappa}{r}u(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{c}{r}\right)u(r) &= \frac{l(l+1)u(r)}{r^2} && |E=-\frac{\kappa^2\hbar^2}{2\mu}\\
\kappa^2u(r)+\frac{\partial u(r)}{\partial r}\left(\frac{2}{r}-\kappa-\kappa\right)+\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}+-\frac{2\kappa}{r}u(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(-\frac{\kappa^2\hbar^2}{2\mu}+\frac{c}{r}\right)u(r) &= \frac{l(l+1)u(r)}{r^2}\\
\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}+2\left(\frac{1}{r}-\kappa\right)\frac{\partial u(r)}{\partial r}+\left(-\kappa^2+\kappa^2-\frac{2\kappa}{r}+\frac{2\mu c}{\hbar^2 r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u(r) &= 0 && |a:=\frac{\mu c}{\hbar^2}\\
\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}+2\left(\frac{1}{r}-\kappa\right)\frac{\partial u(r)}{\partial r}+\left(\frac{2a-2\kappa}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u(r) &= 0
\end{aligned}$$

Hier bietet sich nun wieder ein polynomialer Ansatz mit $u(r)=b_0+b_1r+b_2r^2+b_3r^3+...$ an. Auch hier erhält man durch Einsetzen in die obige Gleichung eine Rekursionsformel. Diese lautet hier

$$b_\tau=2b_{\tau-1}\frac{\kappa\cdot\tau-a}{\tau(\tau+1)-l(l+1)}$$

Der Demtröder verwendet an dieser Stelle anstelle des τ ein j, was ich wegen der Verwechslungsgefahr mit $j=l+s$ nicht verwendet habe. Da die endgültige Funktion normierbar sein soll handelt es sich auch hier um eine abbrechende Reihe. Für diese gilt dann, dass z.B. das n-te Glied das Abbruchglied sein soll und somit 0 ist. Setzt man nun wieder die Werte beim letzten Glied ein, so erhält man dieses Mal

$$\begin{aligned}
0 &= 2b_{n-1}\frac{\kappa\cdot n-a}{n(n+1)-l(l+1)} && |:2b_{n-1}\\
&= \frac{\kappa\cdot n-a}{n(n+1)-l(l+1)} && |\cdot(n(n+1)-l(l+1))\\
&= \kappa\cdot n-a\\
a &= \kappa\cdot n
\end{aligned}$$

mit $\kappa=\sqrt{-2\mu E}/\hbar$

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\sqrt{-2\mu E}n}{\hbar} \\
\frac{a^2}{\hbar^2 n^2} &= -2\mu E \\
E &= -\frac{a^2}{2\mu\hbar^2 n^2} \\
&= -R\frac{Z^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

den altbekannten Ausdruck für die Energie in einem Wasserstoffatom. Betrachtet man nun noch einmal abschließend die Rekursionsformel, so stellt man noch eine weitere Bedingung für l fest. Für $j = l$ würde der Nenner im Bruch 0 werden und somit ein unendliches Glied in der Kette erzeugen. Damit dies nicht passiert, folgt $l \leq n - 1$

Die Lösung des R-Teils lässt sich nicht seperat hinschreiben und stellt jedes Mal eine Lösung einer DGL dar. Diese schreibt sich dann als $R_{n,l}(r)$. Es gilt

$$l \leq n - 1$$

sowie

$$E_n = -R\frac{Z^2}{n^2}$$

Das hier verwendete n wird im weiteren auch als *Hauptquantenzahl* bezeichnet.

Spinquantenzahl s Zunächst betrachtet man den Stern-Gerlach-Versuch. Hierbei durchlaufen Elektronen ein inhomogenes Magnetfeld und werden dadurch abgelenkt. Der Strahl spaltet sich nun beim Durchfliegen dieses Magnetfeldes in zwei Bereiche auf. Somit ist die Annahme naheliegend, dass eine Kraft auf die Elektronen wirken muss. Diese werden schließlich aus der Bahn gelenkt. Es gilt dabei

$$\vec{F} = \vec{p}_m \cdot grad\vec{B}$$

Es folgt somit dass offensichtlich ein magnetisches Moment μ_s existieren muss, sodass eine Ablenkung stattfinden kann. Da der Stern-Gerlach-Versuch mit Silber durchgeführt worden ist. Für dieses gilt im Grundzustand das Termschema $(Ag)5^2S_{1/2}$. Es ist also ein Atom ohne effektiven Bahndrehimpuls. Damit dennoch ein magnetisches Moment entstehen kann muss somit das eine Elektron in der 5. Schale einen Drehimpuls bezitzen. Dieser Drehimpuls (der im eigentlichen Sinne nichts mit einer Drehung des Elektrons zu tuen hat) wir mit $\vec{s}$ bezeichnet.

Der Elektronenspin ist eine Konsequenz aus dem Stern-Gerlach-Versuch. Es gilt

$$s = \pm\frac{1}{2}$$

sowie

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+q)} \cdot \hbar$$

Das hier verwendete s wird im weiteren auch als *Spin* bezeichnet.