

# EP III - Seminar

## Das Bohr'sche Atommodell

**Beobachtung - Atomspektren** Alle Übergänge von Elektronen zwischen den einzelnen Niveaus führen zur Absorption oder Emission eines Photons.

$$h\nu = E_2 - E_1 = \left(-\frac{RyhcZ^2}{n_2^2}\right) - \left(-\frac{RyhcZ^2}{n_1^2}\right) = RyhcZ^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = Ry^* Z^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \quad n_2 < n_1$$

$$\nu_k = \frac{1}{\lambda_k} = RyZ^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

Mit der Wellenzahl  $\nu_k$  und der Rydbergkonstanten  $Ry^* = Ry \cdot h \cdot c = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$ . Die Rydbergkonstante ist also abhängig von der reduzierten Masse  $m$ .

1. Lyman-Serie  $n_2 = 1$  (UV)
2. Balmer-Serie  $n_2 = 2$  (sichtbar)
3. Paschen-Serie  $n_2 = 3$  (IR)

Bei  $n \rightarrow \infty$  ist der Nullpunkt der Energieskala definiert. Negative Energiewerte kennzeichnen also gebundene Zustände der Elektronen.

**Erklärung - Bohrsches Atommodell** Die Bohrschen Postulate sind:

1. Die Elektronen bewegen sich strahlungsfrei auf stabilen Kreisbahnen um den Atomkern.
2. Die stabilen Radien sind diskret. Mit  $E_{n_1}$  die Energie des Ausgangszustands und  $E_{n_2}$  die Energie des Zielzustands, dann wird bei dem entsprechenden Bahnübergang ein Lichtquant der Frequenz  $\nu = \frac{(E_{n_1} - E_{n_2})}{h}$  emittiert bzw. absorbiert.
3. Der Bahndrehimpuls  $L$  ist quantisiert mit  $L = n\hbar$ .

Bohr betrachtet also das Elektron zunächst als klassisches Teilchen, dass sich auf einer Kreisbahn um den Atomkern bewegt. Mit der reduzierte Masse  $m = \frac{m_e m_K}{m_e + m_K}$  wird das Kräftegleichgewicht von Zentrifugalkraft  $F_Z$  und elektromagnetischer Anziehung durch die Coulombkraft  $F_C$  zu:

$$F_Z = m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{r^2} e^2 = F_C$$

Bohr fordert, dass der Drehimpuls quantisiert sein muss:  $L = mrv = mnrn \frac{h}{2\pi r m} = n\hbar = r \times p = r \times \frac{h}{\lambda_e}$  D.h., dass das Elektron durch die de-Broglie-Wellenlänge beschreibbar sein muss:

$$2\pi r = n\lambda_d \quad \lambda_d = \frac{h}{mv}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow v = n \frac{h}{2\pi r m}$$

Diese Bedingung erlaubt nur diskrete Werte für die Bahnradien:

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m Z e^2} = \frac{n^2}{Z} a_0$$

$a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} = 5,2917 \cdot 10^{-11} m$  bezeichnet den Bohr'schen Atomradius.

Die potentielle Energie des Elektrons ist:  $E_{pot} = QU = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

Die kinetische Energie des Elektrons ist:  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} E_{pot}$

Als Gesamtenergie ergibt sich damit:

$$E_n = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} E_{pot} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\pi m Z e^2}{n^2 h^2 \epsilon_0} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{Z^2}{n^2} = -Ry \frac{Z^2}{n^2}$$

Das **Korrespondenzprinzip** bedeutet, dass die Aussagen der Quantentheorie über ein atomares System im Grenzfall großer Quantenzahlen mit den Aussagen der klassischen Theorie übereinstimmen und die aus der klassischen Theorie erhaltenen

Auswahlregeln für den gesamten Bereich der Quantenzahlen gelten.

In der klassischen Physik ist die Frequenz der abgestrahlten Photonen bei Übergängen zwischen zwei Elektronenbahnen gegeben als:

$$\nu_{\text{klassisch}} = \frac{v}{2\pi r} = n \frac{h}{2\pi m} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi m Z e^2}{n^2 h^2 \epsilon_0} \right)^2 = \frac{m Z e^4}{4 \epsilon_0 n^3 h^3}$$

In der Quantenphysik ist die Frequenz der abgestrahlten Photonen bei Übergängen zwischen zwei Elektronenbahnen gegeben als:

$$\nu_{\text{Quantenphysik}} = \frac{m Z e^4}{8 \epsilon_0 h^3} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = \frac{m Z e^4}{8 \epsilon_0 h^3} \frac{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)}{n_1^2 n_2^2}$$

mit  $n_1 - n_2 = \Delta n = 1 \lll n_1, n_2$  und  $n_1, n_2 \approx n \ggg 1$  ergibt sich:

$$\nu_{\text{Quantenphysik}} = \frac{m Z e^4}{8 \epsilon_0 h^3} \frac{2n \Delta n}{n^4} = \frac{m Z e^4}{4 \epsilon_0 n^3 h^3}$$

Der niedrigste Energiezustand ist mit  $E = -Ry$  bzw.  $n = 1$  definiert. Dies steht in Einklang mit der Unschärferelation. Betrachtet man ein Atom mit dem Durchmesser  $a$  ist die Ortsunschärfe des Elektrons gegeben als  $\Delta x = a$ .

Daraus ergibt sich als Mindestimpuls  $\Delta p = \frac{\hbar}{a}$  und folglich als kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ .

Die potentielle Energie des Elektrons im Abstand  $a$  im E-Feld des Kerns ist:  $E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ .

Demnach ist die Gesamtenergie:  $E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ .

Daraus berechnet sich als minimaler Atomradius  $a_{\text{min}} = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} = a_0$

denn  $\frac{dE}{da} = -\frac{2\hbar^2}{2ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = -\frac{1}{a^3} \left( \frac{\hbar^2}{m} - \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{m} = \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} \Leftrightarrow a = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m e^2} = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m e^2}$ .

Demnach wird die minimale Energie  $E_{\text{min}} = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} = -Ry^*$ .

Die Unschärferelation bedingt also automatisch den niedrigsten Zustand im Bohr'schen Atommodell.

Die quantisierte Energieabgabe oder -aufnahme der Atome lässt sich am **Frank-Hertz-Versuch** demonstrieren.

## Aufgaben

- Wie ist das Bohr'sche Atommodell aufgebaut? (Skript)
- Wie entsteht die Quantisierungsbedingung? (Skript)
- Wie ergibt sich aus dem Bohr'schen Atommodell die Linienemission? (Skript)
- Was ist das Korrespondenzprinzip? (Skript)
- Blatt 4 Aufgabe 10: Anregung von Rydberg-Zuständen (Aufgabenzettel)
- Wie groß sind Bahnradius und Geschwindigkeit  $v$  des Elektrons auf der ersten Bohrschen Bahn mit  $n = 1$ 
  - im H-Atom ( $Z=1$ )
  - im Goldatom ( $Z=79$ )
(Demtröder)
- Freie Neutronen haben eine mittlere Lebensdauer von  $\tau = 900s$ . Nach welcher Strecke  $x$  ist die Zahl der Neutronen der de-Broglie-Wellenlänge  $\lambda = 1nm$  in einem parallelen Neutronenstrahl auf die Hälfte ihres Anfangswertes gesunken? (Demtröder)
- Bestimmen Sie die Wellenlänge der Lyman- $\alpha$ -Linie
  - für Tritiumatome,
  - für Positronium  $e^+e^-$ .
(Demtröder)
- Ein Einelektronenatom habe die Energieniveaus  $E_n = -\frac{a}{n^2}$ . Man findet im Spektrum zwei benachbarte Absorptionslinien mit  $\lambda_1 = 97,5nm$  und  $\lambda_2 = 102,8nm$ . Wie groß ist die Konstante  $a$ ? (Demtröder)
- Die Balmerreihe des Wasserstoffspektrums soll mit einem Gitterspektrographen mit dem spektralen Auflösungsvermögen  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 5 \cdot 10^5$  gemessen werden. Bis zu welchem Zustand  $E_n$  können zwei benachbarte Linien noch aufgelöst werden? (Demtröder)
- Fünf Linien in der Balmer-Serie von Wasserstoff haben die Wellenlängen 3669,42 Angström, 3770,06 Angström, 3835,40 Angström, 3970,07 Angström und 4340,47 Angström. Tragen Sie für die Balmer-Serie  $\nu$  als Funktion von  $n$  auf. Bestimmen Sie daraus den Wert von  $n$  für das obere Niveau zu jeder der fünf angegebenen Wellenlängen. (Quantenphysik und statistische Physik, Alonso/Finn)
- Berechnen Sie die Wellenlängendifferenz zwischen den  $H_\alpha$ -Linien (d.h. für den Übergang  $n = 3$  nach  $n = 2$ ) von Wasserstoff, Deuterium und Tritium, die von dem Massenunterschied dieser Atome herrührt. (Quantenphysik und statistische Physik, Alonso/Finn)
- Welche Linien des Wasserstoffspektrums fallen in das sichtbare Gebiet des Spektrums (zwischen 4000 und 7000 Angström)? Welche Linien von  $He^+$  fallen in denselben Bereich? Wie könnte man erkennen, ob Wasserstoff einer Helimprobe zugemischt ist? (Quantenphysik und statistische Physik, Alonso/Finn)

- Literatur**
- Skript S. 50-56
  - Demtröder S. 101-109
  - Alonso/Finn S. 126,158